Colles de Maths - semaine 16 - MP*1

Julien Allasia - ENS de Lyon

Calcul différentiel

Exercice 1 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ telle que pour tout $(x_0, y_0) \in U$, il existe $r_0 > 0$ tel que

$$\forall r \in]0, r_0[, \quad f(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

Montrer que $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

Exercice 2 On considère l'application

$$f : \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ M & \longmapsto & (\mathrm{Tr}(M), \mathrm{Tr}(M^2), \dots, \mathrm{Tr}(M^n)). \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle.
2. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que le rang de $\mathrm{d}f_M$ est égal au degré du polynôme minimal de M.
3. Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal et le polynôme caractéristique sont égaux est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3 Soit U un ouvert connexe par arcs de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^m$ une fonction deux fois différentiable telle que $d^2 f = 0$. Montrer que f est la restriction à U d'une fonction affine (c'est-à-dire d'une fonction linéaire translatée d'un vecteur).

Exercice 4 Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Justifier le caractère $\mathcal{C}^\infty$ et calculer la différentielle de l'application

$$\mathrm{Inv} : \left| \begin{array}{rcl} \mathrm{GL}(E) & \longrightarrow & \mathrm{GL}(E) \\ f & \longmapsto & f^{-1} \end{array} \right. .$$

Bonus : Comment peut-on généraliser le résultat à E un espace vectoriel normé de dimension quelconque ?

Exercice 5 Soit E, F deux espaces vectoriels de dimension finie. On dit que $f : E \to F$ est strictement différentiable en $x \in E$ s'il existe $L \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que

$$\frac{\|f(x+h) - f(x+k) - L(h-k)\|}{\|h-k\|} \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0.$$

1. Montrer que si f est strictement différentiable, elle est différentiable.
2. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ si et seulement si elle est strictement différentiable en tout point.
3. La réciproque du premier point est-elle vraie ?

Exercice 6 Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad x > 0,\ y \in \mathbb{R}.$$

Exercice 7 Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$x\,\frac{\partial f}{\partial y} - y\,\frac{\partial f}{\partial x} = f, \quad x > 0,\, y \in \mathbb{R}.$$

Exercice 8 Soit U un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^n$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe $g \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ tel que $f = \nabla g$;

(ii) Pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $\partial_i f_j = \partial_j f_i$.

Espaces préhilbertiens réels

Exercice 9 Calculer

$$\inf_{(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n} \int_0^\infty e^{-x}\left(1 + a_1 x + \dots + a_n x^n\right)^2 \mathrm{d}x.$$

Indication : On pourra utiliser la formule $\int_0^\infty x^k e^{-x}\,\mathrm{d}x = k!$ pour tout $k \geqslant 0$.

Exercice 10 Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $|||u||| \leqslant 1$.
Montrer que la suite $\left(\frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p} u_k\right)_p$ converge vers le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$.
Indication : On pourra commencer par montrer que $E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$.

Exercice 11 Soit E un espace euclidien, C un convexe fermé non vide de E, $x \in E$.

1. Montrer qu'il existe un unique $p(x) \in C$ tel que $||x - p(x)|| = d(x, C)$.
   Indication : Pour l'unicité, on pourra utiliser l'identité du parallélogramme : si $ABCD$ est un parallélogramme, $2\,AB^2 + 2\,BC^2 = AC^2 + BD^2$.
2. Montrer que pour tout $y \in C$, on a $\langle x - p(x), y - p(x)\rangle \leqslant 0$.
3. Montrer que l'application p est 1-lipschitzienne.

Bonus : Montrer par des contre-exemples la nécessité des hypothèses.